PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

Dans tout le problème, f désigne une fonction à valeurs réelles positives ou nulles, définie, 2π - périodique et continue sur $\mathbb{R}$. On suppose en outre que f n'est pas la constante nulle. Pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$, c_p est le coefficient de Fourier d'indice p de f, soit

$$c_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, e^{-ip\theta} d\theta \quad .$$

Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, on associe à f l'endomorphisme $A_n(f)$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ défini par

$$A_n(f)(z) = \left(\sum_{p=0}^{n} c_{p-q}\, z_p\right)_{q=0,\dots,n} \qquad \text{où} \quad z = (z_0,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$$

et l'application $H_n(f)$ définie sur $\mathbb{C}^{n+1}$ par

$$H_n(f)(z) = \sum_{q=0}^{n} \sum_{p=0}^{n} c_{p-q}\, z_p\, \bar{z}_q \quad .$$

Ainsi $H_n(f)(z) = (z \mid A_n(f)(z))$, où $(z \mid z')$ désigne le produit scalaire sur $\mathbb{C}^{n+1}$ associé à la norme

$$\| z \| = \left(\sum_{p=0}^{n} | z_p |^2\right)^{1/2} \quad .$$

♦

I

1. Vérifier que l'endomorphisme $A_n(f)$ est hermitien, que $H_n(f)$ est une forme quadratique hermitienne, et qu'elle peut s'exprimer par

$$H_n(f)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \left| \sum_{p=0}^{n} z_p\, e^{-ip\theta} \right|^2 d\theta \quad .$$

2.a. Quel est le nombre maximum de valeurs de θ appartenant à $[0,2\pi[$ pour lesquelles la fonction $\theta \mapsto \sum_{p=0}^{n} z_p\, e^{-ip\theta}$ peut s'annuler lorsque les complexes z_p sont fixés et non tous nuls ?

b. La forme $H_n(f)$ est-elle définie positive ?

3.a. Calculer la forme $H_n(1)$ obtenue en remplaçant f par la constante 1 et en déduire que si m et M désignent respectivement le minimum et le maximum de f sur $\mathbb{R}$, on a, pour tout $z \in \mathbb{C}^{n+1}$,

$$m \| z \|^2 \leqslant H_n(f)(z) \leqslant M \| z \|^2 \quad .$$

b. Dans quel cas ces inégalités sont-elles toutes deux strictes ?

4. Comparer à m et M les valeurs propres de $A_n(f)$ en distinguant le cas où f est une constante du cas contraire.

♦

II

Dans toute la suite du problème, on suppose que f est de la forme

$$f(\theta) = a_0 + 2a_1 \cos\theta + 2b_1 \sin\theta$$

où a_0, a_1 et b_1 sont des réels non tous nuls tels que f soit positive ou nulle, et on note $D_n(f)$ le déterminant de l'endomorphisme $A_n(f)$.

1.a. Calculer $D_n(f)$ en fonction des racines α et β du trinôme $x^2 - a_0 x + a_1^2 + b_1^2$ en distinguant le cas où ces racines sont égales de celui où elles sont différentes.

b. Exprimer le maximum et le minimum de f à l'aide de α et β. On notera désormais α la plus grande (au sens large) des deux racines α et β.

c. Calculer la limite de $[D_n(f)]^{\frac{1}{n+1}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Pour tout $\rho \in [-1, 1]$, on pose

$$I(\rho) = \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2\rho\cos\psi + \rho^2)\, d\psi \, .$$

a. Justifier l'existence de $I(1)$ et de $I(-1)$.

b. Comparer $I(\rho)$ et $\frac{1}{2} I(\rho^2)$. En déduire la valeur de $I(\rho)$.

Tournez la page S. V. P.

c. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} \ln f(\theta)\, d\theta = 2\pi \ln \alpha \quad .$$

d. En notant *dans toute la suite* λ_r $(r = 0,..., n)$ les valeurs propres distinctes ou non de $A_n(f)$, établir l'égalité

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{r=0}^{n} \ln \lambda_r = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln f(\theta)\, d\theta \quad .$$

♦

III

1. Pour tout $t \in \left] -\frac{1}{M}, \frac{1}{M} \right[$ où M désigne le maximum de la fonction f définie dans la partie II, on note $A_n(1+tf)$ l'endomorphisme de C^{n+1} associé à la fonction $1+tf$ comme $A_n(f)$ l'est à f, et $D_n(1+tf)$ le déterminant de $A_n(1+tf)$.

On considère la série entière $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k t^k$, avec $p_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k(n+1)} \sum_{r=0}^{n} \lambda_r^k$.

a. Montrer que cette série converge pour $t \in \left] -\frac{1}{M}, \frac{1}{M} \right[$ et exprimer sa somme $\Phi_n(t)$ à l'aide de $D_n(1+tf)$.

b. Lorsque n tend vers $+\infty$, montrer que la fonction Φ_n a une limite Φ développable en série entière de la variable t et exprimer les coefficients de cette série à l'aide d'intégrales portant sur les puissances f^k de f.

c. Etablir pour tout entier $k \geqslant 1$ l'égalité

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{r=0}^{n} \lambda_r^k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^k(\theta)\, d\theta \quad .$$

2. On admet que toute fonction F à valeurs réelles définie et continue sur l'intervalle $[\, m, M \,]$ des valeurs de f est la limite uniforme sur cet intervalle d'une suite de polynômes d'une variable réelle à coefficients réels. Etablir l'égalité

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{r=0}^{n} F(\lambda_r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F[f(\theta)]\, d\theta \quad .$$

3.a. Soit χ la fonction caractéristique sur $[\, m, M \,]$ d'un intervalle non ponctuel $[\, a, b \,] \subset]\, m, M \,[$. En encadrant χ par des fonctions convenables continues sur $[\, m, M \,]$, établir l'égalité

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{r=0}^{n} \chi(\lambda_r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi[f(\theta)]\, d\theta \quad .$$

b. Etudier la même question dans le cas d'un intervalle réduit à un point $a \in]\, m, M \,[$.

c. Si $a < b$, exprimer à l'aide d'images réciproques par la fonction f la limite τ lorsque n tend vers $+\infty$ du rapport du nombre des valeurs propres λ_r de $A_n(f)$ appartenant à $[\, a, b \,]$ au nombre total des valeurs propres de $A_n(f)$, ces valeurs propres étant dans les deux cas comptées chacune avec son ordre de multiplicité.

d. Qu'arrive-t-il si, dans la question III.3.c., on remplace $[\, a,b \,]$ par $]\, a,b \,[$?

e. Calculer numériquement τ lorsque $a_0 = a = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = 0$ et $b = \frac{3}{2}$.

♦ ♦
♦

ECOLE POLYTECHNIQUE
Option M'-Math 1
page 67
1987